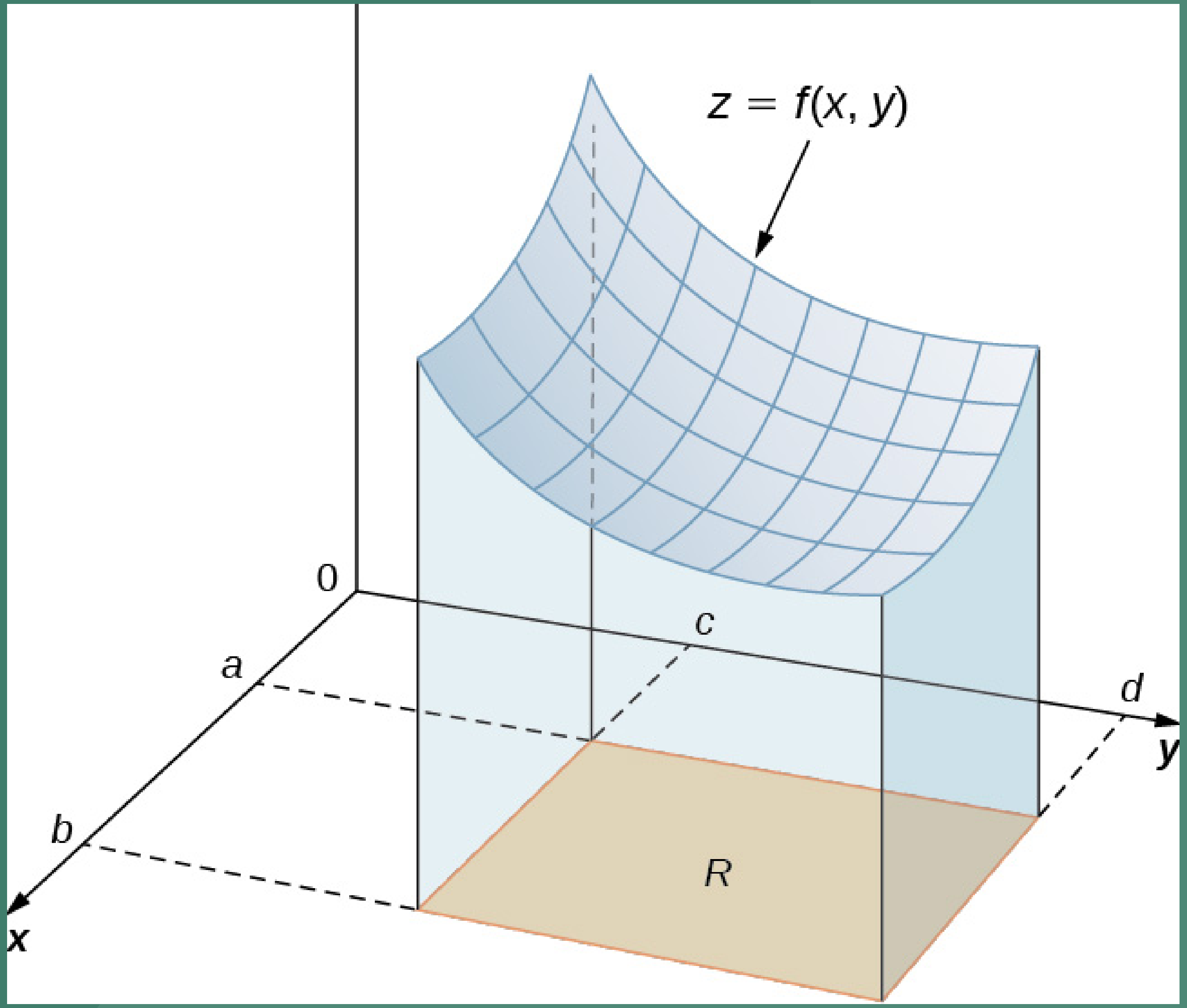
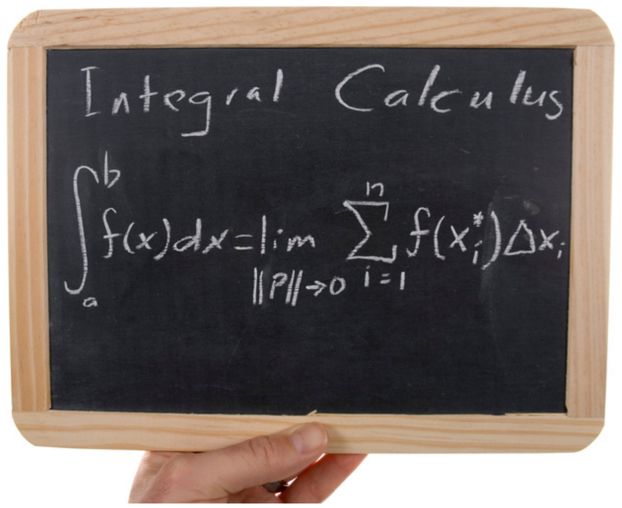
INTEGRALES DOBLES EN UN RECTÁNGULO



RIVERA LEON AXEL MAXIMILIANO

Tabla de Contenido

INTEGRALES DOBLES

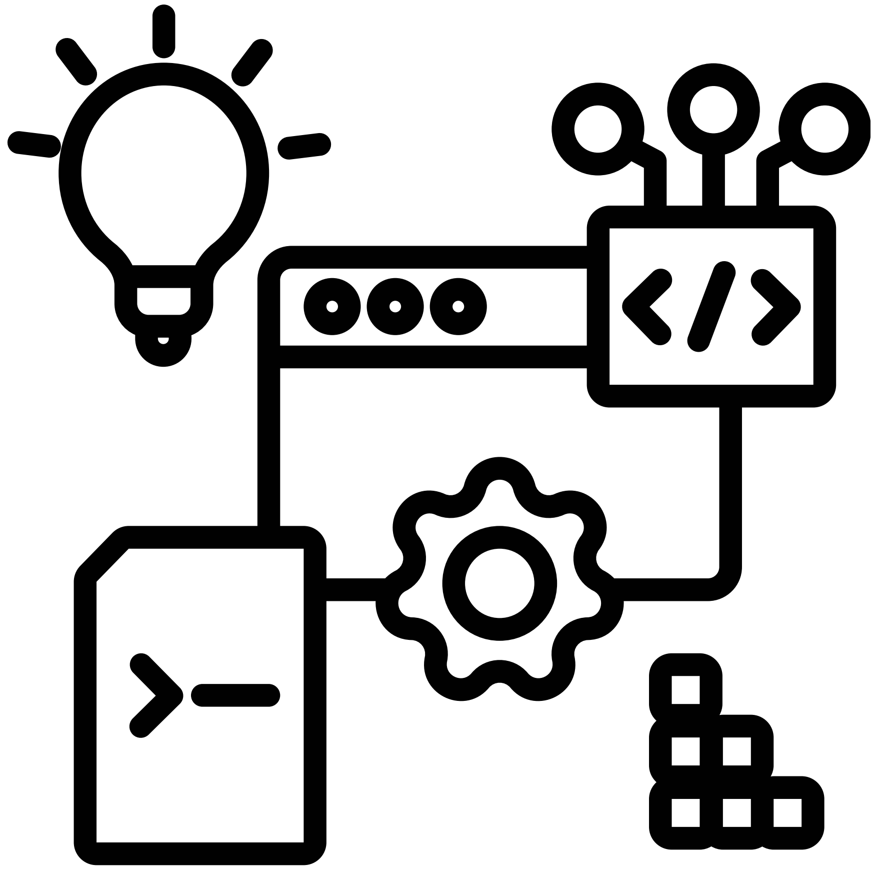


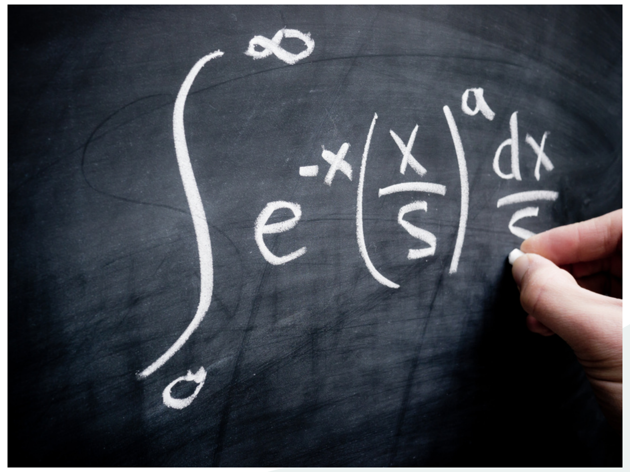
Las integrales dobles son una manera de integrar sobre una región bidimensional. Entre otras cosas, nos permiten calcular el volumen bajo una superficie.

Dada una función de dos variables f(x,y), puedes encontrar el volumen entre la gráfica y una región rectangular del plano xy, y al tomar la integral de una integral

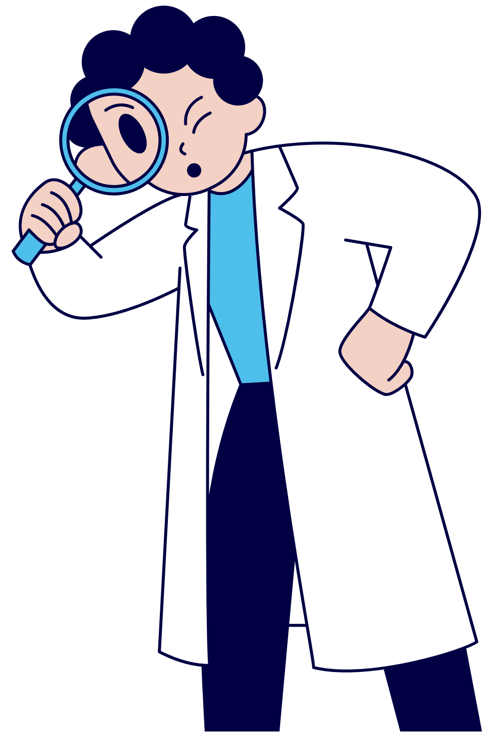
$$\int_{y_1}^{y_2} \overbrace{\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\right)}^{\text{Esta es una función de } y.} dy$$

Llamamos a esta integral "**integral doble**".





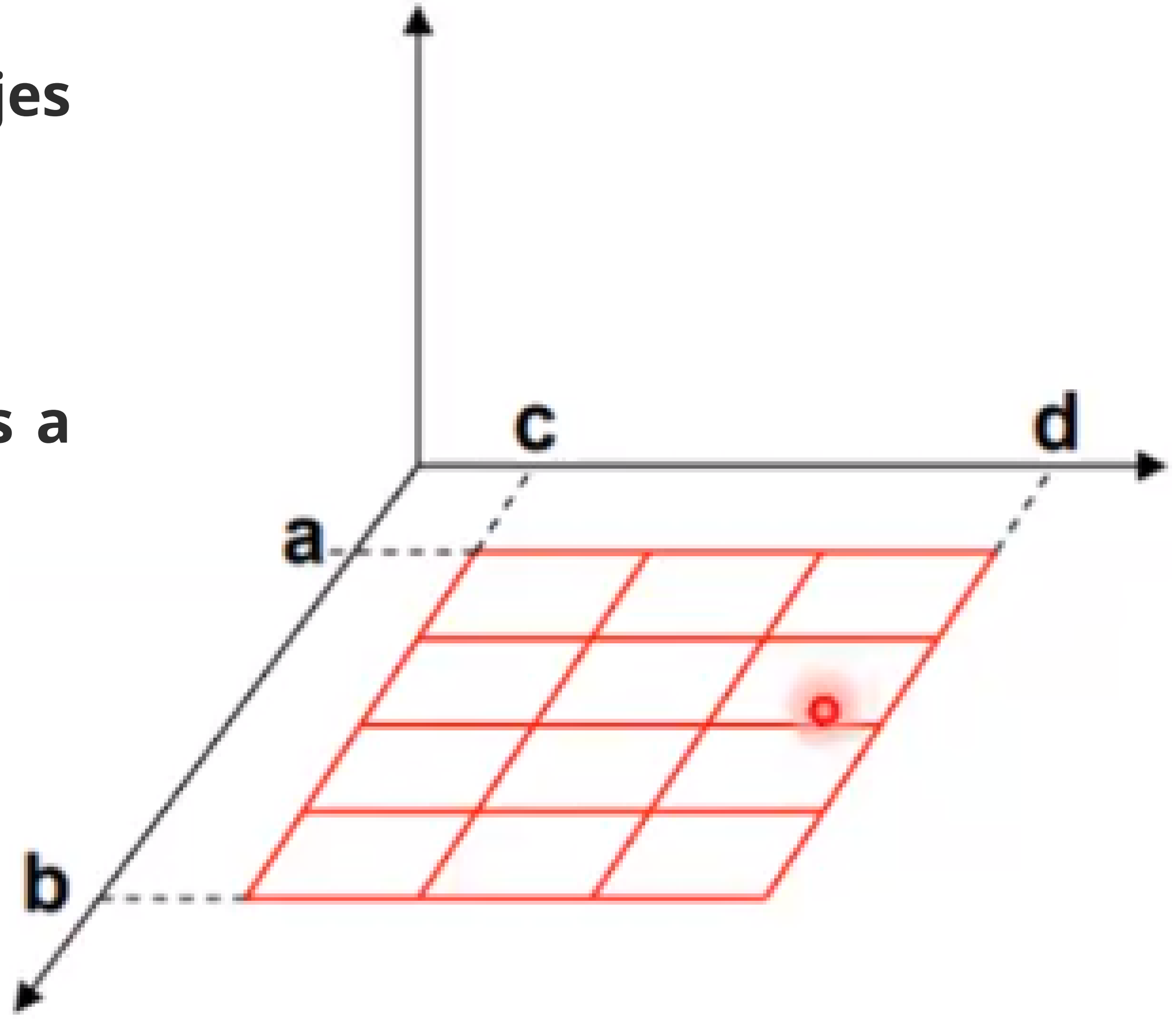
INTEGRAL RIEMANN



La integral de Riemann para una función f de dos variables se define de manera similar a la integral de una función de una variable:

Consideremos el rectángulo R de lados paralelos a los ejes coordenados:

$$R=\{(x,y):a\leq x\leq b \ \wedge \ c\leq y\leq d\}$$



Formemos una partición P de la región R mediante rectas paralelas a los ejes.
Esto divide a R en subrectángulos Rк

Si Aк es el área del rectángulo Rк y escogemos en Rк un punto (Xк. Yк), podemos formar la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k$$

INTEGRAL RIEMANN

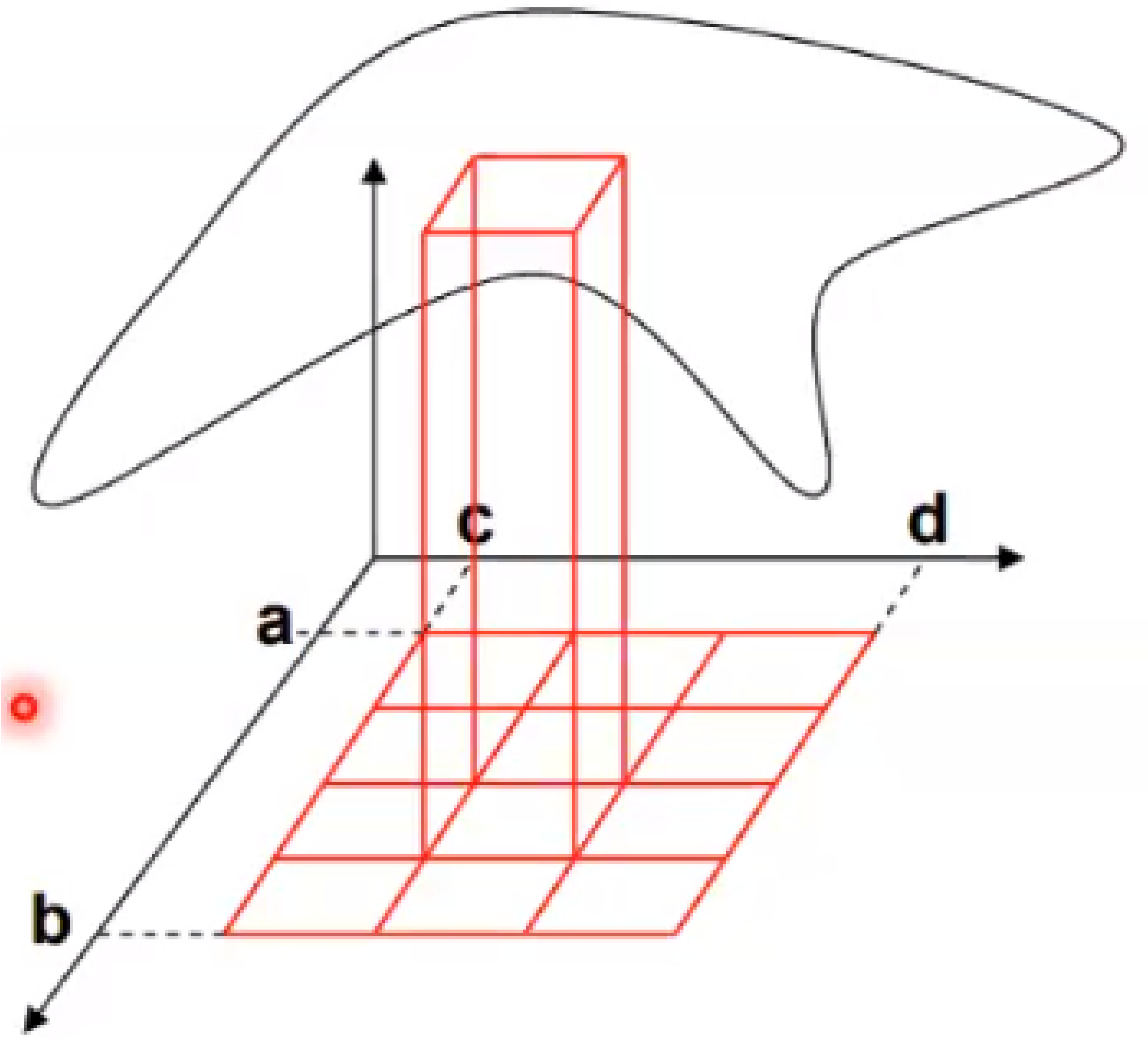
Haciendo cada vez más fina la partición P llegamos a definir la integral de f sobre la región R: $\iint_R f(x,y)\,dA$

Si el siguiente limite existe, decimos que la función f es integrable en R, su valor se denota y se llama integral doble de f sobre R

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Como Ak =Axi;Ayj; es el área de un rectángulo, otra notación para la integral doble es:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$



TEOREMA DE FUBINI

Para calcular mediante este teorema las integrales, realizaremos primero la integral de dentro, tomando la otra variable como una constante, y luego, con la primera variable eliminada, integramos respecto a la segunda.

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Hay que tener en cuenta que en este caso, [c,d] es el intervalo de integración en el eje de las x, mientras que [a,b] es el intervalo de integración en el eje de las y

EJEMPLOS

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(y)\,dxdy$$

$$\int_0^1\left(\int_0^2 (2x+y^2)\,dy\right)dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x^2\mathrm{sen}(y)}{2}\Big|_0^1 dy = \int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\mathrm{sen}(y)dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^{\pi} = 1$$

$$= \int_0^1 x(-\cos(y))\Big|_0^{\pi} dx = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^2 (2x+y^2)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\left[2xy+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2}\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(4x+\frac{8}{3}\right)dx = \left[2x^2+\frac{8}{3}x\right]_{x=0}^{x=1} = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^1 (2x+y^2)\,dx\right)dy = \int_0^2\left(\left[x^2+xy^2\right]_{x=0}^{x=1}\right)dy$$

$$= \int_0^2 (1+y^2)\,dy = \left[y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2} = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

BIBLIOGRAFÍA

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/double-integrals-a/a/doubleintegrals#:~:text=Las%20integrales%20dobles%20son%20una,el%20volumen%20bajo%20una%20superficie.

La clase del 05/mayo/2023

GRACIAS
POR SU ATENCION
NO HAGAN PREGUNTAS
SI TIENE DUDAS
CONSULTE GOOGLE